Méthodes classiques d'intégration des fonctions trigonométriques : Guide des élèves finalistes des options scientifique et technique

HOMA ROSSIGNOL Albert

(Reçu le 5 Janvier 2021, validé le 06 Janvier 2021)
(Received January 5th 2021, valided January 6th 2021)

Résumé :

L'étude que nous présentons dans les lignes suivantes fait partie de l'Analyse fonctionnelle. Il s'agit spécialement de l'intégration des fonctions trigonométriques. Nous avons remarqué que certains élèves finalistes des options scientifiques éprouvent des difficultés pour aborder le chapitre des intégrales. Pire encore, la trigonométrie n'est plus enseignée par beaucoup de professeurs de mathématique.

Pour s'en échapper, ils mettent cela juste à la fin des prévisions des matières qu'on ne sait pas atteindre. Le nœud du problème est d'aider ces élevés à affronter les obstacles que constituent l'intégration de fonctions trigonométriques. Nous avons parcouru quelques types d'intégrales :

Les formules de réduction ; Intégrales du type $\int \sin^n x \cos^m x \ dx$; $m,\ n \in \mathbb{N}$, Intégrales du type $\int \tan^m x \sec^n x \ dx$; $m,\ n \in \mathbb{N}$, Intégrales du type $\int \cot^m x \csc^n x \ dx$; $m,\ n \in \mathbb{N}$, Intégrales rationnelles en $\sin x, \cos x, \tan x \ et \ \cot x$ et avons mis sur pied une formule permettant d'aborder la question. La méthode utilisée est l'induction à partir des formules connues une fois intériorisée cette approche rendre l'éducation facile de la matière.

Mots clés : Intégration-Fonctions-trigonométriques

I. Introduction

Dans le cours de Mathématique Analyse des options scientifiques et techniques, le chapitre des intégrales est une matière très vaste.

Généralement, les professeurs ne s'arrêtent qu'aux méthodes classiques d'intégration vu le temps et la période que la matière devra être enseignée. Or, ce chapitre est souvent programmé, dans les prévisions des matières, à la fin de l'année scolaire. Et avec des perturbations que nous connaissons ces dernières années, la matière donnée est très minime et abordée en retard.

De l’autre côté, le cours de trigonométrie semble perdre ses bases du fait que dans beaucoup d’écoles, elle se donne à partie ou presque plus. Cela génère la frustration chez les élèves quand ils rencontrent cette matière sur leur chemin. L’intérêt du sujet reste celui d’éclairer les élevés et les enseignants dans la manière d’aborder les intégrales des fonctions trigonométriques. Pour cela, nous avons étudié cinq cas qui ont tendance à surgir car le but étant de permettre aux élèves de calculer les intégrales des fonctions trigonométriques avec aisance.

Toutefois, l’étude de la trigonométrie et les méthodes classiques d’intégrations en forment l’édifice de cette recherche.

II. Cadre méthodologique

Pour nous permettre de bien exposer notre étude, nous avons fait recours à une méthode de démonstration qui commencerait par la formule et serait utilisée sur les exercices et problèmes qui présentent les mêmes similitudes. Donc, nous avons fait recours à l’induction.

III. Démonstration

Il est à noter que l’intégration des fonctions trigonométriques est très riche à utiliser toutes les formules classiques d’intégration. Nous nous sommes efforcé de partir d’une formule générale et en dénicher les particularités pour mettre à profit les implications sur la connaissance la matière.

3.1. Implications éducationnelles et développementales

Une fois que cette étude n’est pas suivie en profondeur, les conséquences qui en résulteront sur l’intégration des fonctions trigonométriques seront incommensurables. Il est important que chacun de nous s’approprie de cette notion afin de réduire le manque d’information à ce sujet et d’écarter le doute et la peur d’aborder le sujet.

3.2. Formules de réduction

L’intégrale par parties est souvent utilisée pour établir des formules de réduction. On dit qu’on a une formule de réduction si l’intégrale initiale est égale à une expression contenant une intégrale plus simple que la première.

Formule 1 : Soit à calculer $I = \int \sin^n x \ dx \ (n \in \mathbb{N}^* \ et \ n > 1)$

Solution

$$\int \sin^n x \ dx = \int \sin^{n-1} x \sin x \ dx$$

Posons

$$u = \sin^{n-1} x \Longrightarrow du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \ dx$$

$$dv = \sin x dx \Longrightarrow v = -\cos x$$

$$I = \sin^{n-1} x\,(-\cos x) - \int -\cos x\,(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\ \ dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\ \ dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x\ )\,dx$$

Car $\cos^2 x + \sin^{n-2} x = 1 \Longrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^{n-2} x$

$$I = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} xdx - (n-1)\int \frac{\sin^n x\,dx}{I}$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} xdx - (n-1)I$$

$$I + (n-1)I = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} xdx$$

$$I(1+n-1) = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} xdx$$

$$nI = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} xdx$$

$$\boxed{I = \frac{1}{n}(-\sin^{n-1} x \cos x) + \frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2} xdx}$$

Exemples :

$$I = \int \sin^2 xdx$$

Solution

$$I = \int \sin^2 xdx\,, n = 2$$

$$= \frac{1}{2}(-\sin^{2-1} x \cos x) + \frac{2-1}{2}\int \sin^{2-2} xdx$$

$$= -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int \sin^0 xdx$$

Or $\sin^0 x = (\sin x)^0 = 1$

On aura :

$$I = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx$$

$$= -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + C$$

Or $2 \sin x \cos x = \sin 2x \Longrightarrow \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

On aura :

$$I = -\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + \frac{x}{2} + C$$

$$I = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + x$$

NB : On peut aussi utiliser $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}$ car $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

Calculer $I = \int \sin^5 x \, dx$

Solution

$$I = \int \sin^5 x dx \, , n = 5$$

$I = -\frac{1}{5} - \sin^{5-1} x \cos x + \frac{5-1}{5} \int \sin^3 x dx = -\frac{1}{5} - \sin^4 x \cos x + \frac{4}{5} \int \sin^3 x dx, n = 3$

$= -\frac{1}{5} - \sin^4 x \cos x + \frac{4}{5}\left[-\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} \int \sin x \, dx \right] = -\frac{1}{5} - \sin^4 x \cos x + \left(-\frac{4}{15} \sin^2 x \cos x + \frac{8}{15}(-\cos x) \right) + C = -\frac{1}{5} - \sin^4 x \cos x - \frac{4}{15} \sin^2 x \cos x - \frac{8}{15} \cos x + C$

$\boxed{I = -\frac{1}{5} \cos x \left(\sin^4 x + \frac{4}{3} \sin^2 x - \frac{8}{3} \right) + C}$

Formule 2 : Donner la forme générale d'une primitive de $I = \int \sin \propto x \, e^{ax} \, dx, \propto, a \in \mathbb{R}$.

Solution

$$I = \int \sin \propto x \, e^{ax} \, dx$$

Posons : $u = \sin \propto x \Longrightarrow du = \propto, dV = e^{ax} \, dx \Longrightarrow V = \frac{e^{ax}}{a}$

$$I = \sin \propto x \frac{e^{ax}}{a} - \frac{\propto}{a} \int \cos \propto x \;\; e^{ax} \, dx$$

Posons $u = \cos \propto x \Longrightarrow du = -\propto \sin \propto x \, , dV = e^{ax} \, dx \Longrightarrow V = \frac{e^{ax}}{a}$

$$I = \sin \propto x \frac{e^{ax}}{a} - \frac{\propto}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a} \cos \propto x - \frac{\propto}{a} \int \frac{\sin \propto x \;\; e^{ax} \, dx}{I} \right] I$$

$$= \sin \propto x \frac{e^{ax}}{a} - \frac{\propto e^{ax}}{a^2} \cos \propto x + \frac{\propto^2}{a^2} \, I$$

$$I - \frac{\propto^2}{a^2}\, I = \frac{e^{ax}}{a} \sin \propto x\, - \frac{\propto e^{ax}}{a^2} \cos \propto x$$

$$\left(1 - \frac{\propto^2}{a^2}\right) I = \frac{e^{ax}}{a} \sin \propto x\, - \frac{\propto}{a^2} e^{ax} \cos \propto x$$

$$I = \frac{\frac{e^{ax}}{a} \sin \propto x\, - \frac{\propto}{a^2} e^{ax} \cos \propto x}{1 - \frac{\propto^2}{a^2}}$$

$$= \frac{\frac{e^{ax}}{a} \sin \propto x\, - \frac{\propto}{a^2} e^{ax} \cos \propto x}{\frac{a^2 - \propto^2}{a^2}}$$

$$= \frac{a^2}{a^2 - \propto^2} \left(\frac{e^{ax}}{a} \sin \propto x\, - \frac{\propto}{a^2} e^{ax} \cos \propto x\right)$$

$$\boxed{\int \sin \propto x\, e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2 - \propto^2} (a \sin \propto x - \propto \cos \propto x) + C}$$

Exemples :

Calculer $I = \int \sin 3\, x\, e^{2x}\, dx$

Solution

$$I = \int \sin 3\, x\, e^{2x}\, dx, \qquad \propto = 3, \qquad a = 2$$

$$I = \frac{e^{2x}}{2^2 - 3^2} (2 \sin 3\, x - 3 \cos 3x) + C$$

$$\boxed{I = -\frac{e^{2x}}{5} (2 \sin 3\, x - 3 \cos 3x) + C}$$

Calculer $I = \int \sin 14\, x\, e^{22x}\, dx$

Solution

$$I = \int \sin 14\, x\, e^{22x}\, dx, \qquad \propto = 14, \qquad a = 22$$

$$I = \frac{e^{22x}}{22^2 - 14^2} (22 \sin 14\, x - 14 \cos 14x) + C$$

$$I = \frac{e^{22x}}{484 - 196} (22 \sin 14\, x - 11 \cos 14x) + C$$

$$\boxed{I = \frac{e^{22x}}{288}(22\sin 14\,x - 11\cos 14x) + C}$$

Formule 3 : Donner la formule de réduction de $I = \int \cos^{\mathrm{n}} x\, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*, n > 1)$

Solution

$$I = \int \cos^{\mathrm{n}} x\, dx \quad = \int \cos^{\mathrm{n-1}} x \quad \cos x\, dx$$

Posons : $u = \cos^{\mathrm{n-1}} x \implies du = -(n-1)\cos^{\mathrm{n-1}} x \sin x\, dx$

$$dV = \cos x\, dx \implies V = \sin x$$

$$I = \cos^{\mathrm{n-1}} x \sin x \quad - \int -(n-1)\cos^{\mathrm{n-2}} x \sin x \quad \sin x\, dx$$

$$= \cos^{\mathrm{n-1}} x \sin x \quad + (n-1)\int \cos^{\mathrm{n-2}} x \sin^2 x \quad dx$$

Or $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

On aura :

$$I = \cos^{\mathrm{n-1}} x \sin x \quad + (n-1)\int \cos^{\mathrm{n-2}} x \ (1 - \cos^2 x)dx$$

$$= \cos^{\mathrm{n-1}} x \sin x \quad + (n-1)\int \cos^{\mathrm{n-2}} x\, dx - (n-1)\int \underbrace{\cos^{\mathrm{n}} x\, dx}_{I}$$

$$= \cos^{\mathrm{n-1}} x \sin x \quad + (n-1)\int \cos^{\mathrm{n-2}} x\, dx - (n-1)\, I$$

$$I + (n-1)\, I = \cos^{\mathrm{n-1}} x \sin x \quad + (n-1)\int \cos^{\mathrm{n-2}} x\, dx$$

$$I\,(1 + n - 1) = \cos^{\mathrm{n-1}} x \sin x \quad + (n-1)\int \cos^{\mathrm{n-2}} x\, dx$$

$$nI = \cos^{\mathrm{n-1}} x \sin x \quad + (n-1)\int \cos^{\mathrm{n-2}} x\, dx$$

$$I = \frac{\cos^{\mathrm{n-1}} x \sin x \quad + (n-1)\int \cos^{\mathrm{n-2}} x\, dx}{n}$$

$$\boxed{\int \cos^{\mathrm{n}} x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{\mathrm{n-1}} x \ \sin x + \frac{(n-1)}{n}\int \cos^{\mathrm{n-2}} x\, dx}$$

Exemples :

Calculer $I = \int \cos^3 x \quad dx$

Solution

$$I = \int \cos^3 x \quad dx, \qquad n = 3$$

$$I = \frac{1}{3}\cos^{3-1} x \sin x + \frac{3-1}{3}\int \cos^{3-2}\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \sin dx$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C}$$

Calculer $I = \int \cos^7 x \quad dx$

Solution

$$I = \int \cos^7 x \quad dx, \qquad n = 7$$

$$I = \frac{1}{7}\cos^6 x \sin x + \frac{6}{7}\int \cos^5 x \quad dx$$

$$= \frac{1}{7}\cos^6 x \sin x + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x \quad dx\right)$$

$$= \frac{1}{7}\cos^6 x \sin x + \frac{6}{7}\left[\frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos x \quad dx\right)\right]$$

$$= \frac{1}{7}\cos^6 x \sin x + \frac{6}{7}\left[\frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{7}\cos^6 x \sin x + \frac{6}{35}\cos^4 x \sin x + \frac{24}{105}\cos^2 x \sin x + \frac{48}{105}\sin x + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{7}\cos^6 x \sin x + \frac{6}{35}\cos^4 x \sin x + \frac{8}{35}\cos^2 x \sin x + \frac{16}{35}\sin x + C}$$

INTEGRALES DU TYPE $\int \boldsymbol{\sin^n x \cos^m x\ dx},\ \boldsymbol{m, n}\ \in \mathbb{N}$

Le calcul des intégrales du type $\int \sin^n x \cos^m x\ dx$ dont les exposants$m$et n sont de nombres entiers naturels fait généralement intervenir une des formules suivantes qu'on doit retenir de mémoire et que nous aurons chaque fois à rappeler pour rendre ce travail très clair et compréhensible :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = \sin 2a$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

Là où les conditions sont réunies, il ne nous sera pas interdit à recourir à d'autres méthodes comme le changement de variable. Tel est ce cas qui suit.

Exemple : Calculer $\int \cos^2 5x \ dx$

Solution

$$I = \int \cos^2 5x \ dx$$

Posons : $t = 5x \implies dt = 5dx \implies dx = \frac{dt}{5}$

$$I = \int \cos^2 t \cdot \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{5}\int \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

Car

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$I = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cos 2t$$

$$I = \frac{1}{10}t + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t + C$$

Remplaçons $t$par $5x$, on aura :

$$I = \frac{1}{10}\cdot 5x + \frac{1}{20}\sin 2 \ \cdot 5x + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\ x + \frac{1}{20}\sin 10x + \ C}$$

Formule 1 : soit à calculer $I = \int \sin px \cos qx$, $p, q \in \mathbb{Z}_0$

Résolution

Pour ce type d'intégrales, 2 cas distincts peuvent se présenter : Cas où $p \neq q$ et cas où $p = q$.

1er Cas : $p \neq q$

$$I = \int \sin px \cos qx$$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin(p+q)x + \sin(p-q)x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(p+q)x\, dx + \frac{1}{2}\sin(p-q)x\, dx$$

$$= -\frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)} - \frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} + C$$

$$\boxed{\int \sin px \cos qx\, dx = -\frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)} - \frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} + C}$$

2ème Cas : $p = q$

$$I = \int \sin px \cos qx\, dx = \int \sin px \cos px = \frac{1}{2}\int \sin 2px\, dx$$

Car $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

Ainsi, la primitive sera :

$$I = \int \sin px \cos px\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2px\, dx = -\frac{\cos 2px}{4p} + C$$

Donc

$$\boxed{I = \int \sin px \cos px\, dx = -\frac{\cos 2px}{4p} + C}$$

Exemples :

Calculer $\int \sin x \cos x\, dx = ?$

Solution

$$I = \int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + C$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{4}\cos 2x + C}$$

Calculer $\int \sin 2x \cos 3x \; dx$

Solution

$$I = \int \sin 2x \cos 3x \; dx, \qquad p = 2, \qquad q = 3$$

$$I = -\frac{\cos(2+3)x}{2(2+3)} - \frac{\cos(2-3)x}{2(2-3)} + C$$

$$= -\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos -x}{2(-1)} + C$$

$$\boxed{I = -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2} + C}$$

Car

Formule 2 : Soit à calculer $I = \int \cos px \cos qx \; dx, \;\; p, q \; \in \; \mathbb{Z}_0$

Deux cas peuvent également se présenter : Cas où $p \; \neq q$ et cas où$p \; = q$.

1er Cas : $\boldsymbol{p \; \neq q}$

$$I = \int \cos px \cos qx \; dx = \frac{1}{2}\int [\cos(p+q)\,x + \; \cos(p-q)\,x] \; dx$$

$$= \frac{\sin(p+q)\,x}{2\,(p+q)} + \frac{\sin(p-q)\,x}{2\,(p-q)} + C$$

$$\boxed{\int \cos px \cos qx \; dx = \frac{\sin(p+q)\,x}{2\,(p+q)} + \frac{\sin(p-q)\,x}{2\,(p-q)} + C}$$

2ème Cas : $\boldsymbol{p \; = q}$

$$I = \int \cos px \cos px \; dx = \int \cos^2 px \; dx$$

$$I = \int \sin^6 x \; dx = \int (\sin^2 x)^3 \; dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 \; dx$$

$$= \int \frac{1}{8} s(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \; \cos^3 2x) \quad dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8} \qquad \frac{3}{8}\int \cos^2 2x \ dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x \ dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \ - \frac{1}{8}\cos 2x \ dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx + \int \sin^2 2x \cos 2x \ dx$$

Or $\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$ et $\int \sin^2 2x \cos 2x \ dx = \frac{\sin^3 2x}{3} + C$

On aura :

$$\boxed{I = \frac{5x}{16} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{48} + C}$$

$$\boxed{\int \cos^2 px \ dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos^2 px) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin^2 px}{4p} + C}$$

Car $\cos^2 x \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Exemples

$$\int \cos 2x \cos x \ dx = \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin x}{2} + C$$

$$\int \cos^2 5x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 10x}{20} + C$$

Remarques :

1°) Certaines intégrales de certaines fonctions trigonométriques qui nécessiteraient l'usage de formules de réduction, peuvent trouver solution sans y recourir. Toutefois, les formules de transformation nous servent d'astuce de grande valeur et par changement de variable, tout est résolu.

Exemples

Calculer $I = \int \sin^6 x \ dx$

Solution

Calculer $I = \int \sin^3 x \cos^5 x \ dx$

Solution

$$I = \int \sin^3 x \cos^5 x \ dx$$

$$= \int \sin^2 x \cos^5 x \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \sin x \, dx$$

Posons $k = \cos x \implies dk = -\sin x \, dx$

$$\implies -dk = -\sin x \, dx$$

$$I = -\int (1 - k^2)\, k^5 \, dk = -\int (k^5 - k^7)\, k^5 \, dk = -\frac{k^6}{6} + \frac{k^8}{8} + C$$

En remplaçant $k$par $\cos x$, on aura :

$$\boxed{I = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + C}$$

Calculer $I = \int \sin^4 x \cos^2 x \; dx$

Solution

$$I = \int \sin^4 x \cos^2 x \; dx$$

$$= \int \sin^4 x \,(1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$= \int \sin^4 x \; dx - \int \sin^6 x \; dx$$

A partir, on applique la formule de réduction de $\int \sin^n x \; dx$.

Sinon, on peut encore appliquer la transformation suivante :

$$\sin^4 x \cos^2 x = \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \sin^2 x \,(\sin x \cos x)^2$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{2} \left(\frac{1}{4} \sin^2 2x\right)$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2}$$

$$= \frac{1}{16} (1 - \cos 4x - \cos 2x + \cos 4x \cos 2x)$$

Or $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$

Ceci donne $\cos 4x \cos 2x = \frac{1}{2} (+ \sin 2x)$

$$\sin^4 x \cos^{-2} x = \frac{1}{16}\left(1 - \cos 4x - \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

$$I = \int \sin^4 x \cos^2 x \ dx$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x \, dx - \frac{1}{16}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{32}\int \sin 6x \, dx + \frac{1}{32}\int \sin 2x \, dx$$

$$\boxed{I = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 2x - \frac{1}{192}\cos 6x - \frac{1}{64}\cos 2x + C}$$

Formule 3 : Donner la formule de réduction de $I = \int \sin^m x \cos^n x \ dx$

Solution

Il y a deux possibilités de poser par parties :

$$I = \int \sin^m x \cos^n x \ dx = \int \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x \, dx$$

On pose : $u = \sin^{m-1} x \implies du = (m-1)\sin^{m-2} x \cos x \ dx$

$$dV = \cos^n x \sin x \, dx \longrightarrow V = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$$

$$I = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+1} x \cos x \ dx$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \ dx$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \,(1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx - \frac{m-1}{n+1}\int \frac{\sin^m x \cos^n x \ dx}{I}$$

$$I + \frac{m-1}{n+1} I = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

$$\left(1 + \frac{m-1}{n+1}\right) I = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

$$\left(\frac{n+1+m-1}{n+1}\right) I = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

$$I = -\frac{n+1}{n+m}\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{n+1}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

$\boxed{\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx}$ si $m \neq n$

$$I = \int \sin^m x \cos^n x \ dx = \int \sin^{m-2} x \cos^{n+1} x \cos x \ dx$$

On pourra alors poser soit :

$$u = \cos^{n-1} x \ \longrightarrow du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x \ dx$$

$$dV = \sin^m x \cos x \ dx \ \longrightarrow V = -\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}$$

Ce qui donnera par la suite :

$I = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx$ si $m \neq n$

INTEGRALE DU TYPE $\int \boldsymbol{\tan^m x \sec^n x \ dx}$, $\boldsymbol{m, n} \in \mathbb{N}$

L'identité importante est :

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \ \Longrightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

Par la suite, on pourra changer la variable si c'est possible.

Exemples

Calculer $\int \tan^4 x \ dx$

Solution

$$I = \int \tan^4 x \ dx = \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx = \int \tan^2 x \, (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \ dx - \int \tan^2 x \ dx$$

Posons $u = \tan x \ \longrightarrow du = \sec^2 x \ dx$

$$I = \int u^2 \, du - \int \tan^2 x \ dx$$

$$= \int u^2 \, du - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int u^2 \, du - \int \sec^2 x \ dx - \int dx$$

$$= \frac{u^3}{3} - \tan x - x + C$$

$$\boxed{I = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x - x + C}$$

$$\int \sec^6 x \ dx \ = \ \int \sec^4 x \sec^2 x \ dx = \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x \ dx$$

$$= \int (\tan^2 x + 1)^2 \sec^2 x \ dx$$

Posons $u = \tan x \ \longrightarrow du = \sec^2 x \ dx$

$$I = \int (u^2 + 1)^2 \ du = \int (u^4 + 2u^2 + 1)\, du$$

$$= \frac{u^5}{5} + \frac{2u^3}{3} + u + C$$

$$\boxed{I = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{2}{3} + \tan^3 x + \tan x + C}$$

Remarques :

On peut recourir à la formule de réduction pour

$$I = \int \tan^n x\, dx \qquad n > 1$$

Solution

$$I = \int \tan^n x\, dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x \ dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x\, (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \underbrace{\tan^{n-2} x \ \ dx}_{I_1} - \int \tan^{n-2} x\, dx$$

$$I_1 = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x \ dx$$

Posons $u = \tan x \ \longrightarrow du = \sec^2 x \ dx$

$$I_1 = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\, dx = \int u^{n-2}\, du = \frac{u^{n-1}}{n-1} + C$$

$$I_1 = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C$$

$$\boxed{\int \tan^n x\, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx}$$

Exemple : Calculer $I = \int \tan^4 x\, dx$

Solution

$$I = \int \tan^4 x \, dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \int \tan^2 x \, dx$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \int \sec^2 x \, dx + \int \, dx$$

$$\boxed{\int \tan^4 x \, dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C}$$

$$I = \int \sec^n x \, dx, \quad n > 1$$

Solution

$$I = \int \sec^n x \, dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x \, dx$$

On pose : $u = \sec^{n-2} x \longrightarrow du = (n-2) \sec^{n-3} x \sec x \tan x \, dx$

$$dV = \sec^2 x \, dx \longrightarrow V = \tan x$$

$$I = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-3} x \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot \tan x \, dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \cdot \tan^2 x \, dx$$

$$I = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$I = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \frac{\sec^n x \, dx}{I} + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx$$

$$I + (n-2)I = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx$$

$$(1 + n - 2)I = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx$$

$$I = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-1}{n-2} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

Donc

$$\boxed{\int \sec^n x \, dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-1}{n-2} \int \sec^{n-2} x \, dx}$$

Si $n = 2p + 1$, c'est-à-dire n est impair et $n \geq 3$, $p \in \mathbb{N}^*$

$$I = \int \sec^n x \, dx = \int \sec^{2p+1} x \, dx = \int \sec^{2p-1} x \sec^2 x \; dx$$

Posons : $u = \sec^{2p-1} x \longrightarrow du = (2p-1)\sec^{2p-2} x \sec x \cdot \tan x \; dx$

$$dV = \sec^2 x \; dx \longrightarrow V = \tan x$$

$$I = \sec^{2p-1} x \tan x - (2p-1) \int \sec^{2p-2} x \sec x \cdot \tan x \cdot \tan x \, dx$$

$$= \sec^{2p-1} x \cdot \tan x - (2p-1) \int \sec^{2p-1} x \tan^2 x \, dx$$

$$= \sec^{2p-1} x \cdot \tan x - (2p-1) \int \sec^{2p-1} x \,(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \sec^{2p-1} x \cdot \tan x - (2p-1) \underbrace{\int \sec^{2p+1} x \; dx}_{I} + (2p-1) \int \sec^{2p-1} x \; dx$$

$$I + (2p-1)I = \sec^{2p-1} x \cdot \tan x + (2p-1) \int \sec^{2p-1} x \quad dx$$

$$(1 + 2p - 1)I = \sec^{2p-1} x \tan x + (2p-1) \int \sec^{2p-1} x \quad dx$$

$$2p\, I = \sec^{2p-1} x \tan x + (2p-1) \int \sec^{2p-1} x \quad dx$$

$$I = \frac{\sec^{2p-1} x \tan x}{2p} + \frac{2p-1}{2p} \int \sec^{2p-1} x \quad dx$$

$$\boxed{\int \sec^{2p+1} x \quad dx = \frac{\sec^{2p-1} x \tan x}{2p} + \frac{2p-1}{2p} \int \sec^{2p-1} x \quad dx}$$

Exemple : Calculer $I = \int \sec^3 x \quad dx$

Solution

$$I = \int \sec^3 x \quad dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x \; dx$$

$$= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \; dx$$

$$I = \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{\sec^2 x + \tan x}{\sec x + \tan x}}_{I_1} \; dx$$

Posons $u = \sec x + \tan x$

$$\Longrightarrow du = \sec^2 x + \sec x \tan x \;\; dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ell\text{n}|u| + C = \frac{1}{2}\ell\text{n}|\sec x + \tan x| + C$$

$$\boxed{\int \sec^3 x \;\; dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ell\text{n}|\sec x + \tan x| + C}$$

Calcul de $\boldsymbol{I = \int \tan^m x \sec^n x \;\; dx,\;\; n \in \mathbb{R},\;\; m \in \mathbb{N}}$

Pour ce cas, nous allons examiner deux distincts :

1er cas : si $n \in \mathbb{R}$ et$\boldsymbol{m}$impair $i.e. m = 2p + 1$

Alors $I = \int \tan^{2p+1} x \sec^n x \;\; dx = \int \tan^{2p} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^p \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx$$

On pose $u = \sec x \longrightarrow du = \sec x \tan x \, dx$

$I = \int (u^2 - 1)^p \, u^{n-1} \, du$: facile à calculer

2ème cas : Si $m \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{n}$pair $i.e. n = 2p$

Alors $I = \int \tan^m x \sec^{2p} x \;\; dx = \int \tan^m x \sec^{2p-2} x \sec x \sec^2 x \, dx$

$$= \int \tan^m x \, (\tan^2 x + 1)^{p-1} \sec^2 x \;\; dx$$

Posons $u = \tan x \longrightarrow du = \sec^2 x \, dx$

$I = \int u^m (u^2 + 1)^{p-1} \, du$: Facile à calculer

Exemples

Calculer $I = \int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^4 x \;\; dx$

Solution

$$I = \int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^4 x \;\; dx = \int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^2 x \sec^2 x \, dx$$

$$I = \int \tan^{-\frac{3}{2}} x \, (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \;\; dx$$

$$u = \tan x \longrightarrow du = \sec^2 x \;\; dx$$

$$I = \int u^{-\frac{3}{2}} (u^2 + 1) du = \int u^{\frac{1}{2}} \;\; du + \int u^{-\frac{3}{2}} \;\; du$$

$$= \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{\frac{2}{3}} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$\boxed{\int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^4 x \ dx = \frac{2}{3} \tan^2 x - 2 \tan^{-\frac{1}{2}} x + C}$$

Calculer $I = \int \tan^3 x \sec^{-\frac{1}{2}} x \ dx$

Solution

$$I = \int \tan^3 x \sec^{-\frac{1}{3}} x \ dx = \int \tan^2 x \sec^{-\frac{3}{2}} x \sec x \tan x \ dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^{-\frac{3}{2}} x \sec x \tan x \ dx$$

Posons $u = \sec x \longrightarrow du = \sec x \tan x \ dx$

$$I = \int (u^2 - 1)\, u^{-\frac{3}{2}} \, du = \int u^{\frac{1}{2}} \ du - \int u^{-\frac{3}{2}} \ du = \frac{3}{2} u^{\frac{3}{2}} + 2u^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{3}{2} \sec^{\frac{3}{2}} x + 2 \sec^{-\frac{1}{2}} x + C$$

$$\boxed{I = \int \tan^3 x \sec^{-\frac{1}{2}} x \ dx = \frac{3}{2} \sec^{\frac{3}{2}} x + 2 \sec^{\frac{1}{2}} x + C}$$

INTEGRALE DU TYPE $\int \boldsymbol{\cot^m x \csc^n x \ dx}$

Toutes méthodes utilisées ici pour l'intégrale du type$\int \tan^m x \sec^n x \ dx$ marchent pour $\int \cot^m x \csc^n x \ dx$.

Mais ici, l'identité importante est :

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

FONCTIONS RATIONNELLES EN SINUS $\boldsymbol{x}$, COSINUS $\boldsymbol{x}$, TANGENTE $\boldsymbol{x}$ ET COTANGENTE $\boldsymbol{x}$

Considérons les intégrales de fonctions rationnelles de la forme :

$$I = \int \frac{P(\sin x , \cos x , \tan x , \cot x)}{Q(\sin x , \cos x , \tan x , \cot x)}$$

Où P et Q sont des polynômes ensin x , $\tan x$, $\cos x$, $\cot x$.

Montrons qu'avec telle intégrale peut toujours être ramenée à une intégrale d'une fonction rationnelle par le changement de variable :

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

Exprimons $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$ et, partant, en fonction de t :

$$\sin x = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}$$

Or $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$

Donc

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1-t^2}{2t}$$

Sachant que $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\text{Arc}\tan t = \frac{x}{2}$$

$$x = 2\ \text{Arc}\tan t$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Intégrale du type $\int \boldsymbol{R}\ (\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}\,, \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$

$$I = \int R\ (\sin x\,, \cos x)dx\ = \int R\left[\frac{2t}{1+t^2}\,,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\,dx$$

Exemples

Calculer$I = \int \frac{dx}{\sin x}$

Solution

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} = \ \ell n|t| + C$$

$$= \ \ell n|\tan \quad| + C$$

$$\boxed{I = \int \frac{dx}{\sin x} = \ell n\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C}$$

Calculer $I = \int \frac{dx}{\cos x}$

Solution

$$I = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2} = \int \frac{2dt}{1-t^2}$$

Par décomposition de $\frac{2}{1-t^2}$ en fractions rationnelles simples, on aura :

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$$

$$2 = A\ (1+t) + B(1-t)$$

$$2 = A + At + B - Bt$$

$$2 = A + B + (A-B)t$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \qquad (1) \\ A - B = 0 \qquad (2)\ \Longrightarrow A = B\ (3) \end{cases}$$

(3) dans (1) :

$$A+A=2 \Longrightarrow 2A=2 \Longrightarrow A=1,\ B=1$$

$$I=\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{dt}{1-t}+\int \frac{dt}{1+t}$$

$$=-\ell n\,|1-t|+\ell n\,|1+t|+C$$

$$=-\ell n\,\left|1-\tan\frac{x}{2}\right|+\ell n\,\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$=\ell n\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$$

Or $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

ettan $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}=\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$ $\quad i.e\ \tan\frac{\pi}{4}=1$

$$\boxed{I=\int \frac{dx}{\cos x}=\ell n\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|}$$

$$\int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,dx=\int \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int \frac{2t}{1-t^2}\,dt=\ -\ell n\,|1-t^2|+C$$

$\boxed{I=\ -\ell n\ \left|1-\tan^2\frac{x}{2}\right|+C}$ ou $\boxed{I=\ -\ell n\ \left|1-\tan^2\frac{x}{2}\right|+C}$

$$\int \frac{1-\sin x}{\sin x\,(1-\cos x)}\,dx=\int \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int \frac{\frac{1+t^2-2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(\frac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{t^2-2t+1}{2t\,(t^2)}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{t^2-2t+1}{t^3}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)\ dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2t^2}+\ell n|t|+\frac{2}{t}\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}\,\ell n\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4\,\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\,\ell n\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\cot^2\frac{x}{2} + \cot\frac{x}{2} + C}$$

Remarque

Le changement de variable considéré résout le problème de l’intégration de toute expression de la forme $R(\cos x\,, \sin x)$. C’est pourquoi, il est parfois appelé « Changement de variable universel pour l’intégration des expressions trigonométriques ».

En réalité, ce changement de variable conduit fréquemment à des fractions trop compliquées. Pour cette raison, il est parfois préférable de ne pas utiliser ce changement de variable, mais n’avoir recours à d’autres méthodes menant plus rapidement au but.

Si l’intégrale est de la forme $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, le changement de variable $\sin x = t,\ \cos x\,dx = dt$ nous conduit à l’intégrale de la forme $\int R(t)\ dt$.

Si l’intégrale est de la forme $\int R(\cos x)\sin x\,dx$, elle peut être ramenée à une intégrale d’une fonction rationnelle par le changement de variable $\cos x = t,\ \sin x\,dx = -dt$.

Si la fonction à intégrer ne dépend que de $\tan x$, en effectuant le changement de variable $\tan x = t,\ \ x = arc\ \tan t$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

nous ramenons son intégrale à l’intégrale d’une fonction rationnelle :

$$\int R(\tan x)\,dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$$

Si la fonction à intégrer est de la forme $R(\sin x, \cos x)$, où $\sin x$ et $\cos x$ ne figurent qu’aux puissances paires, nous emploierons le changement de variable :

$$\tan x = t$$

Car $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ peuvent être exprimés par des expressions rationnelles entan x :

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Après avoir effectué ce changement de variable, nous obtenons l'intégrale d'une fonction rationnelle.

Exemples

Calculer l'intégrale $I = \int \frac{\sin^3 x dx}{2+\cos x}$

Solution

$$I = \int \frac{\sin^3 x\, dx}{2+\cos x} = \int \frac{\sin^2 x \sin x\, dx}{2+\cos x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x\, dx}{2+\cos x}$$

Posons : $\cos x = t \implies \sin x\, dx = -dt$

On obtient l'intégrale suivante :

$$I = \int \frac{(1-t^2)(-dt)}{2+t} = \int \frac{(t^2-1)dt}{2+t}$$

On effectue la division euclidienne de $\frac{t^2-1}{2+t}$ et obtient $t-2+\frac{3}{t+2}$.

$$I = \int \left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt = \int t\, dt - 2\int dt + 3\int \frac{dt}{t+2}$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\, \ell n|t+2| + C$$

$$\boxed{I = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\, \ell n|\cos x + 2| + C}$$

Calculer l'intégrale $I = \int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$

Solution

$I = \int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$. Effectuons le changement de variable en posant$\tan x = t$, ce qui donne$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$I = \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2-\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2(1+t^2)-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, arc\ \tan\frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{\sqrt{2}}\, arc\ \tan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C}$$

Considérons maintenant une intégrale du type $\int R(\sin x\,, \cos x)\, dx$ où $R(\sin x\,, \cos x) = \sin^m x \cos^n x\, dx$ (où m et n sont de nombres entiers).

Il faut considérer trois cas :

$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, où l'un au moins des nombres m et n est impair.

Posons $n = 2p + 1$ et transformons l'intégrale :

$$I = \int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x\, dx = \int \sin^m x\, (1 - \sin^2 x)^p \cos x\, dx$$

Effectuons le changement de variable :

$$\sin x = t, \qquad \cos x\ \ dx = dt$$

En substituant ces expressions dans l'intégrale considérée, nous trouvons :

$$\int \sin^m x \cos^n x \cos x\, dx = \int t^m (1 - t^2)^p dt$$

C'est l'intégrale d'une fonction rationnelle en t.

Exemple

Calculer l'intégrale $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$

Solution

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x\ \ dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x\ \ dt}{\sin^4 x}$$

Posons : $\sin x = t, \cos x\ \ dx = dt,$ nous obtenons :

$$I = \int \frac{(1 - t^2)}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^2} + \frac{1}{t} + C$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C}$$

$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, où m et n sont des nombres pairs non négatifs.

Posons : $m = 2p,\ \ n = 2q.$

Nous pouvons recourir aux formules trigonométriques suivantes :

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}et\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\ (i)$

En substituant ces expressions dans l'intégrale considérée, on obtient :

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx$$

En effectuant les opérations indiquées, on obtient un développement suivant les puissances paires et impaires de $\cos 2x$. Les termes contenant les puissances impaires peuvent être intégrés comme nous l'avons indiqué au point précédent (voir a)).

En ce qui concerne les termes contenant des puissances paires, nous appliquons successivement la formule (i) afin d'abaisser le degré de ces puissances. En procédant de cette manière, on arrive finalement à des termes de la forme :$\int \cos kx\, dx$ que l'on intègre facilement :

Exemple : soit à calculer :

$$\int \sin^4 x\, dx$$

Solution

$$I = \int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2)^2\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - \ 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - 2\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$\boxed{I = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C}$$

Si les 2 exposants sont pairs et si l'un d'eux au moins est négatif, la méthode indiquée dans le cas b) est sans effet. Il faut alors poser $\tan x = t$ (ou $\cot x = t$)

Exemple : Calculer l'intégrale $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

Solution

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x\,(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^6 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \tan^2 x\,(1 + \tan^2 x)^2 dx$$

Posons $\tan x = t$, alors $x = arc\ \tan t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, et nous avons :

$$I = \int t^2(1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2)\ dt = \int t^2\,dt + \int t^4\,dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C$$

$$\boxed{I = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C}$$

Remarque

Dans la pratique, on effectuera les essais suivants :

Si $\frac{P\ (\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)}{Q(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)}$reste invariant quand on remplace :

$x\ par - x$, on pose $\cos x = t$

$x\ par\ \pi - x$, on pose $\sin x = t$

$x\ par\ \pi + x$, on pose $\tan x = t$

Exemple :

Remplaçons $x\ par\ \pi - x$, on aura :

$$I = \int \frac{dx}{\cos x - \cos 3x} = \int \frac{dx}{\cos(\pi - x) - \cos 3(\pi - x)}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos \pi_1 \cos x + \sin \pi_0 \sin x - (\cos_1 3\pi \cos 3x + \sin 3\pi_0 \sin 3x)}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos x - \cos 3x}$$

On voit clairement que la forme différentielle proposée ne change pas. On pose donc :

$$\sin t \Longrightarrow dt = \cos x\ \ dx$$

Or $\cos x - \cos 3x = \cos x - (4\cos^3 x - 3\cos x)$

$$= 4\cos x - 4\cos^3 x$$

$$= 4\cos x\,(1 - \cos^2 x)$$

$$= 4\cos x \sin^2 x$$

On aura par la suite :

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right) dt$$

$$= \frac{-1}{4t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1-t^2} \quad et \quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1-t} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-1}{4t} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{4t} + \frac{1}{8}\,\ell n\,|1-t| + \frac{1}{8}\,\ell n\,|1+t| + C$$

$$= -\frac{1}{4t} + \frac{1}{8}\,\ell n\,\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{4\sin x} + \frac{1}{8}\,\ell n\,\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C}$$

CONCLUSION

Nous avons abordé l'intégrale de fonction trigonométrique en 5 points. Ce sujet apporte une diversité dans le raisonnement concourant au même but : aider les apprenants à surmonter leurs difficultés sur l'intégration de ces fonctions. Nous prierons aux enseignants de mathématique de s'approprier de ces notions et les faire les leurs. Nous encourageons nos élèves à affronter sans complexe ces objets mathématiques dont l'importance n'est plus à démonter.

Bibliographie

BATODISAMA V. et Cie : Maitriser les Maths 6, Edition Loyola, Kinshasa, 2010

CREM, Mathématique 6eme Algèbre/ Analyse, ECA, Kinshasa, 1986

GIRARD G., LENTIN A. : Arithmétique Algèbre et notions d'Analyse, Terminale C, Tome2, Editions Classiques Hachette, Paris, 1968

GROUPE AHA, Vers l'infini pas à pas, Approche Heuristique de l'analyse, Edition De Boeck Wesmael, Bruxelles, 1999

HOMA R. Intégration numérique, TFC ISP KIKWIT 2000 Inedit.

KASIAMA, Cours d'analyse numérique, G1 Math-Physique, ISP KIKWIT 1997.Inedit.

PISKOUNOV N. : calcul différentiel et intégral, Tome 1, 7e édition, Edition MIR, Moscou, 1978.

HOMA ROSSIGNOL Albert